Distributietheorie 14-3-'96

Tentamenopgave

I

Beschouw de differentiaaloperator $D = (\frac{d}{dx})^2 + \frac{d}{dx} - 2$.

1. Bepaal de fundamentele oplossing van D behorend tot $\mathcal{D}'_+$.

2. Bepaal de oplossing $T \in \mathcal{D}'_+$ van de vergelijking $DT = Y$ (Y de Heaviside één stap functie).

3. Bepaal, m.b.v. de symboolrekening, de oplossing f van het volgende klassieke beginwaardeprobleem, waarbij g een continue functie op $\mathbb{R}$ is:

$$Df = g, f(0) = 1, f'(0) = 1$$

4. Wat is de oplossing wanneer $g = 1$?

II

1. Bereken de Fouriergetransformeerde van de Gauss-functie gedefinieerd op $\mathbb{R}$ door:

$$G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}$$

2. Toon met behulp hiervan, en van de geëigende theorie, dat

$$G_t * G_s = G_{t+s} \quad \forall t, s > 0$$

3. Geef de definitie van de Fouriergetransformeerde van een getemperde distributie, en bereken m.b.v. geschikte rekenregels de Fourier getransformeerde van de functie x^2.

III

Het doel van deze opgave is een uitdrukking te krijgen voor de afgeleide van orde n van een functie $\varphi \in \mathcal{E}$, zonder via de lagere orde afgeleiden te gaan. Bij de vragen 1. t.e.m. 4. nemen we als bekend aan dat het convolutieproduct in de convolutie-algebra $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ de volgende continuïteit heeft: Als $T_n \to T$ en $S_n \to S$ en er bestaat een compact interval I zodat $\mathrm{dr}(T_n) \subset I$, en $\mathrm{dr}(S_n) \subset I$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, dan geldt ook $T_n * S_n \to T * S$ Hier betekent $T_n \to T$ dat $< T_n, \varphi >$ convergeert naar $< T, \varphi >$ voor alle $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$. De analoge eigenschap geldt voor families afhankelijk van een reële parameter.

1. Bereken de limiet in $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ van de distributies $T_h = \frac{\delta_h - \delta_{-h}}{2h}$ voor $h \to 0$, met $h \neq 0$.

2. Toon aan dat $\lim_{h\to 0} T_h * T_h = \delta' * \delta' = \delta''$ en geef een uitdrukking aan $\varphi''(0)$ als limiet van termen met $\varphi(2h)$, $\varphi(0)$ en $\varphi(-2h)$.

3. In iedere commutatieve algebra kan men gebruik maken van de binomiaalformule. Bereken m.b.v. de binomiaalformule het n^e machts convolutieproduct $(\frac{\delta_h - \delta_{-h}}{2h})^{*n}$.

4. Door gebruik te maken van de genoemde continuïteit van het convolutieproduct en van vraag 3, bepaal een limiet-uitdrukking voor $\varphi^{(n)}(0)$ in termen van $\varphi(nh) \ldots \varphi(-nh)$.

5. Door terug te gaan naar de definitie van het convolutieproduct, bewijs de gebruikte continuïteitseigenschap.